

---

**РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ  
В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ**


---

УДК 537.312.62;621.385.6

**ГИЛЬБЕРТ-СПЕКТРОСКОПИЯ НА ОСНОВЕ  
НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭФФЕКТА ДЖОЗЕФСОНА.  
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ БАЗИС И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ**

© 2003 г. А. Я. Шульман, Е. Л. Косарев, М. А. Тарасов

Поступила в редакцию 11.05.2003 г.

Рассмотрены ограничения гильберт-спектроскопии, связанные с использованием в ее теоретическом обосновании резистивно-шунтированной модели джозефсоновского перехода. Отмечено, что эти ограничения особенно существенны, если гильберт-спектроскопия применяется для анализа спектра самих джозефсоновских колебаний. Представлены формулы, обобщающие первоначальные соотношения гильберт-спектроскопии на случай формы спектра джозефсоновских колебаний, отличной от лоренцевской. Проведен анализ вычислительных аспектов восстановления спектра исследуемого излучения в гильберт-спектроскопии из входных данных – “гильбертограммы” – с помощью дискретного преобразования Фурье. Изложен подход к обработке результатов измерений, основанный на рассмотрении преобразования Гильберта как интегрального уравнения первого рода относительно спектра исследуемого излучения. Для решения интегрального уравнения применен один из способов решения некорректных задач – метод максимума правдоподобия, что позволяет достичь максимально возможного улучшения разрешения при заданной величине отношения сигнал/шум. На численном примере и экспериментально измеренном спектре частотно-модулированного излучения лампы обратной волны показана возможность разрешения спектральных особенностей в измеряемом спектре с характерным масштабом, меньшим ширины линии джозефсоновской генерации.

**ВВЕДЕНИЕ**

Как было показано в работе [1], изменение вольтамперной характеристики джозефсоновского перехода под действием широкополосного некогерентного электромагнитного излучения связано со спектром этого излучения преобразованием Гильберта. На основе этого соотношения была предложена техника спектроскопии субмиллиметрового диапазона, позже названная гильберт-спектроскопией [2]. Начиная с 1980 г. основной поток публикаций в этой области был связан с выбором типа джозефсоновского перехода и квазиоптических элементов для связи его с излучением, наиболее подходящими для реализации такой спектроскопии (см., например, [3–6]). Недавно техника гильберт-спектроскопии была распространена с гигагерцового на терагерцовый диапазон благодаря появлению джозефсоновских переходов на основе высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП), чувствительных к излучению этого диапазона [7]. Однако развитию теории, численным и чисто спектроскопическим аспектам нового метода спектральных измерений не уделялось достаточного внимания. Цель данной публикации – восполнить в какой-то мере этот пробел.

Первоначальным толчком к идее гильберт-спектроскопии послужило сходство между нечетно-резонансной формой селективного отклика джозефсоновского перехода на монохроматическое

облучение как функции напряжения смещения и хорошо известной в оптике зависимостью показателя преломления от частоты в области аномальной дисперсии. На качественном уровне было ясно, что применение преобразования Гильберта к кривой подобной формы даст в результате некий пик, положение которого на оси смещений зависит от частоты падающего на переход излучения. Однако количественное описание результата такого преобразования и обоснование гильберт-спектроскопии стало возможным только на основе формулы (6.49) в работе [8]. При этом оказалось, что нечувствительность спектра исследуемого излучения, получаемого после гильберт-преобразования, к отклонению реального перехода от резистивной модели обеспечивается только после преобразования выражения для отклика по напряжению, полученного в [8], в выражение для токового отклика, которое использовалась в [1] для вывода основного соотношения гильберт-спектроскопии. (Подробнее эти моменты обсуждаются в разд. 1.) Здесь лишь отметим, что для определения спектра внешнего излучения, воздействующего на переход, опущенные в [1] детали были несущественны. Однако нарастающая тенденция использовать гильберт-спектроскопию для определения спектра собственного излучения джозефсоновских структур требует внесения необходимых уточнений в основные соотношения гильберт-спектроскопии (разд. 1).

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является одним из наиболее распространенных способов численной реализации преобразования Гильберта над измеренными кривыми. Однако без учета специфических особенностей классов функций, к которым принадлежат измеренный отклик и искомый спектр, непосредственное применение ДПФ приводит к качественным искажениям и количественным ошибкам как в восстановленных спектрах, так и в рассчитываемых в процессе численного моделирования откликах перехода на излучение с заданным спектром. Источники этих трудностей и возможные способы их обхода рассмотрены в первой части разд. 2.

Хотя преобразование Гильберта принадлежит к типу взаимоднозначных интегральных преобразований аналогично преобразованиям Фурье или Лапласа, проблема деконволюции в гильберт-спектроскопии при учете конечной ширины линии джозефсоновской генерации наиболее полным образом может быть рассмотрена с использованием методов решения, развитых для интегральных уравнений первого рода и учитывающих принадлежность задачи восстановления спектра к классу некорректных задач. Во второй части раздела 2 приведен вывод интегрального уравнения относительно спектра падающего излучения. Для решения этого уравнения используется метод максимального правдоподобия, реализованный в пакете программ RECOVERY [9], который позволяет получить максимально возможное улучшение разрешения для данного отношения сигнал/шум и даже достичь сверхразрешения, как показано в [10, 11] (разд. 3).

В разделе 4 численным моделированием и на примере экспериментально измеренного отклика джозефсоновского ВТСП-перехода показано, что решение интегрального уравнения позволяет восстановить искомый спектр с разрешением выше естественного предела, т.е. достичь сверхразрешения в соответствии с определением и критерием, установленными в [10].

Имеет смысл определить более точно термины деконволюция и сверхразрешение применительно к рассматриваемому случаю. Поскольку влияние аппаратной (инструментальной) функции спектроскопического прибора обычно описывается интегралом свертки (конволюции) (см., например [13]), то процедурой деконволюции называют устранение искажений измеряемого спектра, внесенные аппаратной функцией. Этого можно достичь различными методами, но мы сохраним термин деконволюция для процедур, которые восстанавливают в исследуемом спектре детали, измеренные, но искаженные в процессе измерения. Охарактеризовать такие детали можно, например, пользуясь известным критерием разрешения Рэлея для исходного спектра или эффективной спектральной

ной шириной его преобразования Фурье. Термин сверхразрешение может быть определен как процедура восстановления деталей, которые оказались невидимы или подавлены ниже уровня шума вследствие преобразования спектра аппаратной функцией [10–12].

В случае гильберт-спектроскопии назовем деконволюцией любой способ, который позволяет минимизировать искажения спектра, вызванные ограничением интервала измерения. Сверхразрешение определим как процедуру, устраняющую в какой-либо степени влияние конечной ширины линии джозефсоновской генерации. Результаты данной работы показывают, что в гильберт-спектроскопии подход к восстановлению спектра с использованием интегрального уравнения позволяет одновременно решить обе задачи: деконволюции и сверхразрешения.

## 1. ОСНОВЫ ГИЛЬБЕРТ-СПЕКТРОСКОПИИ

*Эффект Джозефсона.* Подробное изложение эффекта Джозефсона можно найти в книгах [8, 14–15]. Мы приведем лишь основные соотношения, необходимые для дальнейшего. Сверхпроводящее состояние характеризуется комплексным параметром порядка (волновой функцией сверхпроводящего конденсата)

$$\Psi = \Delta \exp(i\varphi),$$

где  $\Delta$  связана с энергетической щелью для нормальных квазичастичных возбуждений,  $\varphi$ -фаза параметра порядка. Эффект Джозефсона возникает, когда два сверхпроводника разделены тонким слоем (барьером), в котором  $\Delta$  подавлена, но возможность туннелирования для куперовских пар остается, т.е. имеется туннельное просачивание конденсатной волновой функции из одного сверхпроводника в другой. В этом случае сверхпроводящий ток  $I$  (сверхток) куперовских пар через барьер может быть выражен формулой

$$I = I_c \sin \varphi, \quad \varphi = \varphi_L - \varphi_R, \quad (1)$$

где  $\varphi$  теперь разность фаз левого и правого сверхпроводников.  $I_c$  – критический ток стационарного эффекта Джозефсона. Пока  $I < I_c$ , т.е. ток внешнего источника не превышает критического, на джозефсоновском переходе нет падения напряжения и перемещение заряда через переход осуществляется только сверхпроводящей компонентой тока.

Помимо сверхпроводящего тока, порождаемого пространственной неоднородностью фазы, возможны случаи, когда разность фаз зависит от времени. В этом случае на джозефсоновском пе-

переходе возникает падение напряжения  $V$  и применимы известные соотношения Джозефсона

$$\hbar \frac{d\phi}{dt} = 2eV, \quad (2)$$

$$\Omega_V = 2eV/\hbar. \quad (3)$$

Непосредственным следствием формул (1)–(2) в случае постоянного во времени  $V$  является осциллирующий с джозефсоновской частотой  $\Omega_V$  сверхпроводящий ток. Эти “самоподдерживающиеся” джозефсоновские колебания служат основой всех спектроскопических применений эффекта Джозефсона. Нелинейно взаимодействуя с внешним, зависящим от времени возмущением, эти колебания вызывают изменения в вольтамперной характеристике (ВАХ) перехода на постоянном токе или порождают отклик на промежуточных частотах.

Простейшей моделью джозефсоновского перехода является так называемая модель резистивно-шунтированного перехода (далее – RSJ, или – резистивная модель). В этом случае полный ток через переход записывается в виде суммы сверхпроводящего тока и тока нормальных квазичастичных возбуждений (электронов):

$$V/R = I_c \sin \phi = I,$$

где  $R$  – сопротивление перехода в нормальном (несверхпроводящем) состоянии. Это уравнение вместе с джозефсоновским уравнением (2) составляют систему, которая описывает все свойства переходов малой площади. Обычно принято использовать безразмерные единицы, которые определяются соотношениями:

$$i = I/I_c, \quad V_c = I_c R, \quad v = V/V_c, \\ \Omega_c = 2eV_c/\hbar, \quad \omega = \Omega/\Omega_c, \quad \tau = \Omega_c t.$$

Тогда систему уравнений можно переписать в безразмерной форме:

$$d\phi/d\tau + \sin \phi = i, \quad d\phi/d\tau = v. \quad (4)$$

Если обеспечивается режим постоянного во времени напряжения смещения на переходе, то ВАХ постоянного тока (усредненный по времени ток) будет простым линейным соотношением  $\bar{i} = v$ , поскольку сверхток в этом случае есть чисто гармоническая функция от времени. Решение уравнений (4) в случае постоянного во времени тока через переход (режим задания тока) дает нелинейную ВАХ, которая может быть записана в форме

$$\bar{i} = \text{sign } \bar{v} \sqrt{\bar{v}^2 + 1}, \quad (5)$$

где  $\bar{v}$  есть среднее по времени напряжение смещения, черта сверху означает усреднение по времени. Следует отметить, что напряжение на переходе будет в этом случае периодической (но не гармонической) функцией времени. Ее фунда-

ментальная частота определяется джозефсоновским соотношением (3), взятым для усредненного по времени напряжения смещения  $\omega_{\bar{v}} = \bar{v}$ .

Пусть теперь через переход пропускается дополнительно монохроматический внешний ток  $\tilde{i}(\tau)$  с угловой частотой  $\omega$ . При этом ВАХ изменится. Соответствующее выражение, описывающее токовый отклик при заданном напряжении  $\bar{v} = \text{const}$  было получено Кантером и Верноном [16] в квадратичном приближении:

$$\Delta \bar{i}(\bar{v}, \omega) = \frac{1}{4\bar{v}} \frac{\tilde{i}^2}{\bar{v}^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

Очевидно, что это выражение не работает вблизи “резонансного” смещения, где  $\bar{v} = \omega$ . Более детальный анализ показывает, что в этом месте на ВАХ формируется ступень тока (ступень Шапиро). Ее величина пропорциональна первой степени амплитуды  $\tilde{i}(\omega)$  переменного тока. Внутри этого интервала постоянного тока частота джозефсоновских колебаний на ступени остается синхронизированной с внешней частотой (см., например, [8]).

Рассмотрим соотношение Кантера–Вернона (6) и поставим вопрос, может ли оно породить преобразование Гильберта. На первый взгляд его правая часть выглядит как ядро преобразования Гильберта. Если бы мы имели право описать отклик перехода на переменный ток с непрерывным спектром  $S_i(\omega)$  формулой

$$\Delta \bar{i}(\bar{v}) \propto P.V. \int_0^{\infty} d\omega S_i(\omega) \Delta \bar{i}(\bar{v}, \omega),$$

где  $P.V.$  – главное значение интеграла по Коши, тогда можно было бы надеяться получить спектр  $S(\omega)$  падающего на переход излучения посредством обратного преобразования Гильберта. Однако вблизи резонансного напряжения  $\bar{v} = \omega$  отклик становится не квадратичным, а линейным по амплитуде переменного тока. Поэтому ситуацию надо рассмотреть более детально.

*Теория гильберт-спектроскопии.* Соотношение Кантера–Вернона (6) было получено в пренебрежении флуктуационными токами  $i_f(\tau)$  в переходе. На практике такие флуктуации присутствуют всегда и должны быть включены в выражение для тока. Перепишем первое уравнение системы (4)

$$d\phi/d\tau + \sin \phi = \bar{i} + i_f. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) дает конечную ширину для всех гармоник спектра джозефсоновских колебаний и устраняет расходимость в формуле (6) [8].

Аналитическое выражение для отклика на монохроматическое возмущение имеет вид [1]:

$$\Delta \bar{i}(\bar{v}, \omega) = \frac{\tilde{i}^2(\omega)}{8i\bar{v}} \left[ \frac{\bar{v} + \omega}{(\bar{v} + \omega)^2 + \gamma^2} + \frac{\bar{v} - \omega}{(\bar{v} - \omega)^2 + \gamma^2} \right]. \quad (8)$$

При выводе предполагалось, что флуктуационный ток  $\delta$ -коррелирован во времени и выполнены условия  $\bar{v}, \omega \gg \gamma$ , где  $\gamma$  – ширина линии джозефсоновских колебаний, обусловленная действием флуктуаций. Формула (8) для токового отклика получается из формулы (6.49) в [8] для отклика по напряжению делением на выражение для дифференциального сопротивления перехода, которое вычислено также в рамках резистивной модели. Естественно, что если бы реальные переходы описывались резистивной моделью точно, оба выражения были бы абсолютно эквивалентны с точки зрения гильберт-спекроскопии. Однако формула (8) менее чувствительна к отклонениям свойств ВАХ реальных переходов от идеальной (5). Одна из причин этого – незначительность вклада в полный отклик от изменения квазичастичного тока по сравнению с вкладом от изменения сверхтока на нулевой частоте в режиме заданного постоянного напряжения  $\bar{V}$  на переходе.

Теперь можем записать, что переменный ток со спектральной плотностью  $S_i(\omega)$  приводит к отклику по формуле [2]

$$\begin{aligned} \Delta \bar{i}(\bar{v}) &= \int_0^{\infty} d\omega \Delta \bar{i}(\bar{v}, \omega) = \\ &= \frac{\pi}{8i\bar{v}} \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_i(\omega) \frac{\omega - \bar{v}}{(\omega - \bar{v})^2 + \gamma^2} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Необходимо отметить, что связь излучения с джозефсоновским переходом обычно осуществляется с использованием различного типа антенн. Поэтому между спектром переменного тока  $S_i(\omega)$  и спектром электромагнитного излучения, действующего на джозефсоновский переход, существует соотношение

$$S_i(\omega) = |K(\omega)|^2 S(\omega),$$

где  $K(\omega)$  – передаточная функция антенны. Для определения истинного спектра сигнала необходимо учитывать эту функцию.

Видно, что выражение в скобках в уравнении (9) представляет собой преобразование Гильберта от функции  $S_i(\omega)$ , если перейти к пределу  $\gamma \rightarrow 0$ . Введя функцию

$$g(\bar{v}) = \frac{8}{\pi} \bar{i} \Delta \bar{i}(\bar{v}) \quad (10)$$

и применяя к ней преобразование Гильберта в виде

$$\hat{S}(\omega) = H_{\bar{v} \rightarrow \omega} [g(\bar{v})] \equiv \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{v} \frac{g(\bar{v})}{\bar{v} - \omega}, \quad (11)$$

получим (см. также [2])

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' S_i(\omega') \frac{\gamma}{(\omega' - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (12)$$

Оценка спектра  $S_i(\omega)$  в выражениях (11), (12) обозначена как  $\hat{S}(\omega)$ . В формуле (12) легко узнать свертку спектральной плотности переменного наведенного тока с распределением Лоренца. Последнее представляет собой положительно-частотную часть  $J(\omega - \bar{v}, \bar{v})$  спектра собственных джозефсоновских колебаний (см. формулу (6.63) в [8])

$$\begin{aligned} S_J(\omega, \bar{v}) &\propto \frac{\gamma(\bar{v})}{(\omega - \bar{v})^2 + \gamma^2(\bar{v})} + \frac{\gamma(\bar{v})}{(\omega + \bar{v})^2 + \gamma^2(\bar{v})} \equiv \\ &\equiv J(\omega - \bar{v}, \bar{v}) + J(\omega + \bar{v}, \bar{v}), \end{aligned} \quad (13)$$

полученного теоретически в резистивной модели с  $\delta$ -коррелированным тепловым шумом. Если  $S_i(\omega)$  медленно меняется в частотном интервале порядка  $\gamma$ , то распределение Лоренца в подынтегральном выражении можно заменить на  $\pi\delta(\omega' - \omega)$ , и полученная функция  $\hat{S}(\omega)$  очевидно становится равной искомому спектру  $S_i(\omega)$ . Формально это рассуждение соответствует переходу к пределу  $\gamma \rightarrow 0$  в выражениях (9) и (12). Вместе с тем, если функция  $S_i(\omega)$  более узкополосная, чем спектр джозефсоновских колебаний, и может быть принята пропорциональной  $\delta(\omega - \omega_0)$ , то последнее выражение дает нам интенсивность джозефсоновских колебаний  $J(\omega_0 - \bar{v}, \bar{v})$  на частоте  $\omega_0$  как функцию напряжения смещения  $\bar{v}$ .

Важно отметить, что ширина линии джозефсоновских колебаний в действительности зависит от смещения. Это явным образом отражено в уравнении (13) вторым аргументом функции  $J(\omega_0 \pm \bar{v}, \bar{v})$ . В рамках резистивной модели флуктуационный ток  $i_f(\tau)$  порождается равновесными тепловыми флуктуациями в нормальном сопротивлении  $R$  перехода, и ширина линии генерации, согласно [8], равна (в размерном виде)

$$\Gamma(\bar{V}) \equiv \gamma(\bar{v}) \Omega_c = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2e}{\hbar} \right)^2 \frac{R_d^2(\bar{V})}{R} kT \left( 1 + \frac{I_c^2}{2\bar{I}^2(\bar{V})} \right).$$

Здесь  $R_d = d\bar{V}/d\bar{I}$  – дифференциальное сопротивление перехода. Отсюда видно, что  $\Gamma$  зависит от напряжения смещения. Это обстоятельство ставит под вопрос переход от выражения (9) к (12) с

помощью преобразования Гильберта (11) даже в рамках резистивной модели. Ниже объясняется, при каких условиях зависимость  $\gamma$  от  $\bar{v}$  не будет препятствовать применению гильберт-спектро-скопии.

Следует также отметить, что характеристики реальных джозефсоновских переходов могут в большей или меньшей степени отличаться от идеальной резистивной модели. С одной стороны, известно, что резистивная модель дает хорошее описание некоторых джозефсоновских переходов. Обсуждение ее применимости для переходов из низкотемпературных сверхпроводников можно найти в [14]. В случае ВТСП-переходов имеются успешные экспериментальные тесты применимости RSJ-модели к описанию высокочастотных и шумовых характеристик переходов [4, 6, 17, 18] и к сквидам [19].

С другой стороны, важно знать, до какой степени результаты, полученные методом гильберт-спектро-скопии, зависят от неидеальности джозефсоновского перехода. Эта проблема сейчас еще только решается, особенно в части ВТСП-переходов или более сложных джозефсоновских структур, таких как когерентные цепочки джозефсоновских переходов. В частности, предложение использовать выражение (12) для измерения спектра джозефсоновских колебаний было сформулировано в [2] лишь в качестве предположения, но оно уже было применено к количественному анализу формы спектра джозефсоновской генерации [4], [6] без какого-либо обоснования.

Решая уравнения (7) для перехода с шумами под действием монохроматического облучения методом, аналогичным использованному в работе [20], можно вывести обобщение уравнения (9), которое позволяет устранить ограничение на применимость гильберт-спектро-скопии лоренцевской формой спектра джозефсоновских колебаний. Легко увидеть, что уравнение (9) с учетом (13) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Delta \bar{i}(\bar{v}) &= \\ &= \frac{\pi}{8 \bar{i} \bar{v}} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_i(\omega) \left( \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{J(\omega' - \bar{v}, \bar{v})}{\omega' - \omega} \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражение (14), в свою очередь, преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Delta \bar{i}(\bar{v}) &= \\ &= \frac{\pi}{8 \bar{i} \bar{v}} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_i(\omega) \left( -\frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} dv' \frac{J(\omega - v', \bar{v})}{v' - \bar{v}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

При условии  $\gamma(\bar{v})/\bar{v} \ll 1$  во всем существенном диапазоне напряжений смещения второй аргумент в спектральной плотности  $J$  в (15) не мешает вычис-

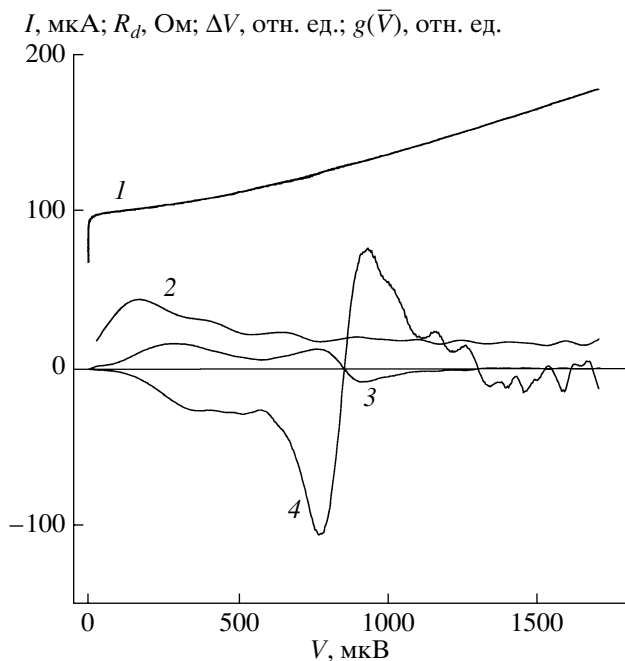
лению преобразования Гильберта согласно уравнению (11) при произвольной, но гладкой зависимости  $\gamma$  от  $\bar{v}$ . Это утверждение может быть доказано с использованием теоремы Бедросяна о “замораживании” медленных сомножителей при преобразовании Гильберта [21] (см. также [22, 23]). В результате мы приходим к обобщению свертки в выражении (12) в виде

$$\hat{S}(\omega_{\bar{v}}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_i(\omega) J(\omega - \omega_{\bar{v}}, \bar{v}). \quad (16)$$

Из (16) следует, что гильберт-спектро-скопия может применяться для измерений как спектра падающего на переход излучения, так и спектра собственно джозефсоновской генерации независимо от реального спектрального распределения последней, если одно из рассматриваемых спектральных распределений намного уже другого. Доказательство такого утверждения аналогично используемому в спектро-скопии оптических и шумовых сигналов (см., например, [24, 25]). Выражение (16) позволяет определить, при каких условиях гильберт-спектро-скопия может использоваться для экспериментального измерения формы спектра джозефсоновских колебаний или зависимости  $\Gamma$  от  $\bar{V}$  и как эти эксперименты следует ставить. Если измеряется спектр излучения внешнего источника с необходимостью учесть конечную ширину линии джозефсоновской генерации, выражения (15)–(16) позволяют решать задачу деконволюции в функциональном пространстве либо измеренных, либо преобразованных по Гильберту функций.

*Особенности измерений в гильберт-спектро-скопии.* Для большей ясности последующих преобразований данных при вычислениях кратко опишем методику измерений. Функцию  $g(\bar{v})$  в уравнении (10) следует сформировать по результатам измерений. Для этого ВАХ  $\bar{I}(\bar{V})$  и отклик  $\Delta \bar{I}(\bar{V})$  должны быть измерены как функции напряжения смещения  $\bar{V}$ . Диапазон развертки напряжения смещения должен включать интервал  $[0 - \bar{V}_{\text{макс}}]$  с достаточно большим значением максимального напряжения  $\bar{V}_{\text{макс}}$ , чтобы обеспечить эффективно бесконечные пределы при интегрировании по напряжению в выражении (11). Для функции  $g(\bar{v})$  введем термин *гильбертограмма* в тесной аналогии с интерферограммой в фурье-спектро-скопии.

Разрешение в гильберт-спектро-скопии зависит от ширины линии джозефсоновских колебаний  $\gamma$ , от длины интервала развертки по напряжению и от расстояния между точками отсчета напряжения, которые обычно располагают равномерно. Ширина линии зависит от внутренних флуктуаций



**Рис. 1.** Пример исходных экспериментальных данных как функций напряжения смещения: 1 – ток,  $I$ ; 2 – дифференциальное сопротивление перехода  $R_d$ ; 3 – величина отклика по напряжению  $\Delta V$ ; 4 – гильбертограмма  $g(\bar{V})$ .

напряжения в переходе и от уровня внешних шумов. Последние должны быть подавлены до возможно более низких значений в широком диапазоне частот от сетевой до частот телевизионных станций. Экспериментальная установка должна позволять модулировать входное излучение и измерять фазу отклика  $\Delta \bar{I}$  с использованием синхронного детектора. Функция  $g(\bar{v})$ , определяемая уравнением (10), может быть получена из измеренных значений несложной процедурой [26]. Простейший случай имеет место, когда задано постоянное напряжение смещения. При этом две кривые, ток и отклик, должны быть измерены в зависимости от смещения. Для случая схемы с заданием тока через переход необходимо вычислить токовый отклик из измеренного отклика по напряжению с использованием известного выражения

$$\Delta \bar{I} = -\Delta \bar{V} / R_d. \quad (17)$$

Дифференциальное сопротивление  $R_d(\bar{V})$  может быть измерено непосредственно или численно рассчитано по измеренной ВАХ. Необходимость использования соотношения (17) обсуждалась после формулы (8). На рис. 1 приведены все необходимые исходные данные для проведения гильберт-спектропии. Гильбертограмма получена из этих данных с использованием выражений

(10) и (17). Образец представлял собой джозефсоновский переход из ВТСП, облучаемый лампой обратной волны (ЛОВ) на частоте 410 ГГц.

## 2. ОБРАБОТКА ДАННЫХ В ГИЛЬБЕРТ-СПЕКТРОСКОПИИ

*Дискретное преобразование Фурье и гильберт-спектропия.* Благодаря простоте преобразования Гильберта от тригонометрических функций:

$$H_{x \rightarrow y}[\cos ax] = -\sin ay,$$

$$H_{x \rightarrow y}[\sin ax] = \cos ay, \quad a > 0; \quad (18)$$

$$H_{x \rightarrow y}[\exp(iax)] = i \operatorname{sign}(a) \exp(ia y),$$

аналитически его легко выполнять над функциями, представленными своим рядом или интегралом Фурье.

Измеренную в дискретных точках гильбертограмму можно представить конечным отрезком ряда Фурье, коэффициенты которого вычислены с помощью дискретного преобразования Фурье, и применить к этому ряду преобразование Гильберта. Однако чтобы такой прием дал удовлетворительное представление спектра исследуемого излучения, оказалось необходимым продолжать измерение гильбертограммы до таких значений напряжения смещения, пока ее отличие от нуля не станет на уровне шумов измерений. Из-за медленного, как  $1/\bar{V}$ , спада отклика от области, где сосредоточена основная интенсивность измеряемого спектра, приходится увеличивать напряжение до величин, значительно больших критического  $V_c$ , что сопровождается значительным ростом токовых шумов, грозит повреждением перехода большими токами и в любом случае уменьшает верхнюю границу рабочего диапазона спектропии для данного типа перехода.

Если подвергнуть обработке кривую, измерение которой было прекращено, когда она еще имела заметно отличные от нуля значения, то из-за периодического продолжения функции ее дискретным рядом Фурье на границах периодов возникает разрыв первого рода, который в результате преобразования Гильберта трансформируется в логарифмическую расходящуюся, медленно убывающую от места разрыва и дающую большую ошибку даже вдали от границ периода (интервала измерений). Пользуясь свойством нечетности функции отклика относительно смены знака напряжения смещения, можно уменьшить влияние разрыва, продолжив нечетным образом на отрицательные смещения отклик, измеренный на положительном участке смещений. Такой прием эквивалентен применению дискретного синус-преобразования Фурье на положительном участке. Однако при этом теряется постоянная составляющая в

восстановленном спектре и появляются участки, где спектральная плотность имеет недопустимые отрицательные значения. Признаки такого рода дефектов обработки нередко встречаются в литературе. Типичную иллюстрацию можно увидеть, например, в работе [26] на рис. 1с.

*Переход к интегральному уравнению с гильбертовым ядром.* В данной работе предлагается другой подход. Применив обратное преобразование Гильберта, мы можем обратить уравнение (11) и переписать его в виде интеграла свертки искомой оценки спектра  $\hat{S}(\omega)$  с гильбертовским ядром

$$H_{\omega \rightarrow \bar{\nu}}^{-1}[\hat{S}(\omega)] \equiv -\frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\hat{S}(\omega)}{\omega - \bar{\nu}} = g(\bar{\nu}), \quad (19)$$

получив тем самым сингулярное интегральное уравнение относительно  $\hat{S}(\omega)$ .

Измеряемый спектр  $S(\omega)$  излучения и его оценка  $\hat{S}(\omega)$  обычно принадлежат к классу функций с компактным носителем и конечной энергией, т.е. они равны нулю выше некоторой частоты и интеграл от них конечен. Напротив, преобразование Гильберта таких функций имеет долго тянущиеся хвосты и медленно спадает как  $1/\bar{\nu}$  при  $\bar{\nu} \rightarrow \infty$ . Применение интегрального уравнения позволяет использовать относительную локальность искомого решения и избежать измерения гильбертограммы в области напряжений вдали от области существования спектра. Измерения можно ограничить областью напряжений, где величина гильбертограммы еще превышает шумы (см. далее разд. 4).

Для решения интегрального уравнения свертки (19) с гильбертовским ядром был применен пакет программ RECOVERY [9], который использует метод максимального правдоподобия. Как было показано [10], этот алгоритм позволяет достичь сверхразрешения в случае несингулярного ядра интегрального уравнения. В данной работе продемонстрировано, что это также справедливо и для ядра преобразования Гильберта с сингулярностью.

*Дискретное преобразование Гильберта и гильберт-спектроскопия.* В теории связи и при цифровой обработке сигналов, как правило, встречаются периодические или почти-периодические функции с ограниченным спектром, который с достаточной точностью может быть представлен коэффициентами ДПФ, если правильно выбрать частоту дискретизации и избежать эффекта наложения частот (см., например, [27]). В этом случае преобразование Гильберта может быть эффективно выполнено аналитически над конечным тригонометрическим рядом, представляющим измеренную функцию.

В оптике, при использовании соотношения Крамерса–Кронига для нахождения полос поглощения

по спектрам показателя преломления, и в гильберт-спектроскопии, при использовании выражения (11), приходится иметь дело с непериодическими функциями, представляемыми интегралом Фурье. В таких случаях для устранения вкладов от периодического продолжения измеренной функции можно попытаться следовать рекомендации [23] дополнять измеренные значения нулями до удвоения измеренного интервала. Если измерения были прекращены при ненулевом значении отклика, избежать появления разрыва в исходной функции и, соответственно, логарифмической особенности в результате преобразования Гильберта таким образом не удастся.

Однако в случае гильберт-спектроскопии возможно следующее видоизменение описанного приема. Если продолжить измеренную функцию четным образом через правый край, то полученная на двойном интервале функция будет непрерывной и обращается в нуль на обоих концах, так как в нуле смещения,  $\bar{\nu} = 0$ , функция  $g(\bar{\nu})$  обращается в нуль по самой своей конструкции (10). Применив затем дискретное синус-преобразование Фурье и используя полученные коэффициенты в обратном косинус-преобразовании Фурье, найдем искомый спектр с точностью до постоянной составляющей. Последняя может быть определена как экстраполяция нескольких первых гармоник вычисленных коэффициентов ДПФ к нулевой частоте. Конечно, для получения хорошего результата от такой процедуры входная функция должна быть измерена на всем интервале, на котором искомая функция отлична от нуля. Однако при этом входную функцию оказывается необязательно измерять до уровня шумов.

Предложенная процедура не может быть применена для обратного процесса – вычисления функции  $g(\bar{\nu})$  по спектру  $\hat{S}(\omega)$  в процессе решения интегрального уравнения (19), так как ошибки в вычисленных значениях  $g(\bar{\nu})$  на краю интервала будут всегда велики и медленно убывать при его увеличении. Поэтому для вычисления свертки в (19) использовалось дискретное преобразование Гильберта, при котором ядро дискретизируется в получелых значениях аргумента, т.е. в точках, расположенных посередине между точками, в которых вычисляются  $g(\bar{\nu})$  и  $\hat{S}(\omega)$  (см., например, [28, 29]). При вычислении интеграла свертки в этом случае опять можно воспользоваться быстрым ДПФ.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТ-СПЕКТРОСКОПИИ

Существует естественная связь уравнения (19) с соотношениями Крамерса–Кронига в электродинамике и оптике [20], и существуют алгоритмы и компьютерные программы, специально пред-

назначенные для их расчета [31–34]. Все примененные в этих работах методы могут быть отнесены к линейным методам, поскольку они используют линейное разложение данных по различным наборам базисных функций. Согласно [10], любой метод линейного восстановления может только модифицировать амплитуду гармоник Фурье, но не может генерировать новых, отсутствующих в исходных данных или потерянных во входных шумах. Поэтому линейные методы не могут достичь сверхразрешения.

Определим теперь коэффициент сверхразрешения  $SR$  как отношение ширины спектра Фурье выходного сигнала ко входной ширине

$$SR = (\Delta\omega)_{\text{вых}}/(\Delta\omega)_{\text{вх}}. \quad (20)$$

Определение  $\Delta\omega$  для любого сигнала дается формулой

$$\Delta\omega = \frac{1}{S_{\text{макс}}(\omega)} \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega, \quad (21)$$

где  $S(\omega)$  – спектральная интенсивность сигнала на положительной частотной полуоси и  $S_{\text{макс}}(\omega)$  – максимальное значение этой величины. Следует отметить, что определение (20) формально не совпадает с определением из [10], поскольку ядро преобразования Гильберта

$$K(x-y) = \frac{1}{x-y} \quad (22)$$

имеет бесконечную ширину полосы как в прямом  $x$ -пространстве, так и в  $\omega$ -пространстве его преобразования Фурье. Но новое определение (21) может быть одинаково использовано как для ядра преобразования Гильберта, так и обычного ядра типа лоренцевского или гауссовского.

Как было показано [10], максимально возможное сверхразрешение в основном определяется отношением сигнал/шум в экспериментальных данных и может быть легко предсказано с использованием простой формулы

$$SR_{\text{макс}} = \frac{1}{3} \log_2 \left( 1 + \frac{E_c}{E_{\text{ш}}} \right) \approx \frac{dB}{10},$$

где  $E_c$  – энергия измеряемого сигнала,  $E_{\text{ш}}$  – энергия шума во входных данных и  $dB = 10 \lg(E_c/E_{\text{ш}})$  отношение сигнал/шум во входном сигнале.

В силу хорошо известных формул преобразования Гильберта (18) гармоники любой функции не изменяют своей величины после преобразования Гильберта. Из этого следует, что

$$(\Delta\omega)_{\text{вых}} = (\Delta\omega)_{\text{вх}},$$

и, по нашему определению сверхразрешения (20), для преобразования Гильберта мы всегда должны получать  $SR = 1$ . Это очень важное общее за-

ключение, и на первый взгляд мы не можем получить  $SR > 1$  в гильберт-спектроскопии. В действительности это не так. На практике мы всегда имеем конечную ширину линии джозефсоновской генерации  $J(\omega - \bar{\nu}, \bar{\nu})$  в уравнениях (14)–(16). Поэтому помимо преобразования Гильберта в (11), мы имеем интегралы свертки входного спектра  $S_i(\omega)$  либо с преобразованием Гильберта от спектра джозефсоновских колебаний в (14), либо с самим контуром линии  $J(\omega - \bar{\nu}, \bar{\nu})$  в (16). В результате спектральная ширина реального ядра в интегральных уравнениях для  $S_i(\omega)$  всегда оказывается конечной, а концепция сверхразрешения в гильберт-спектроскопии хорошо определенной. Это, в принципе, дает возможность увеличить ширину полосы выходного сигнала, используя процедуру восстановления.

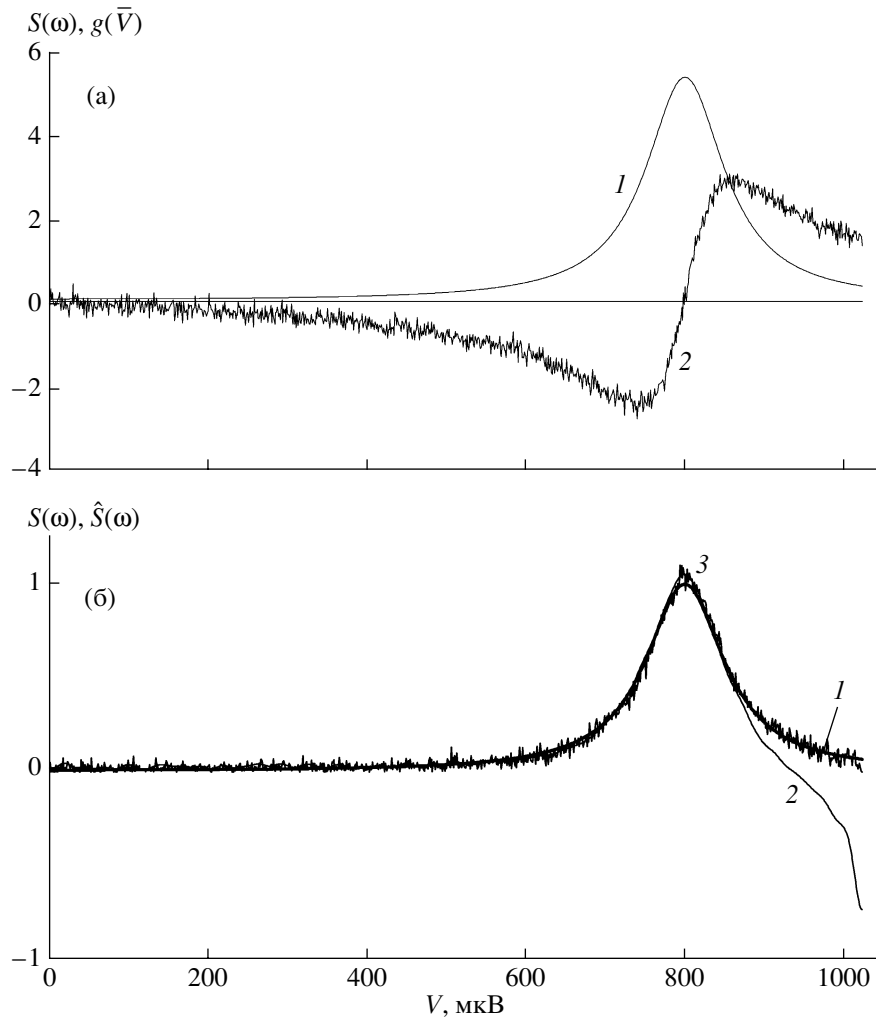
В отличие от методов, предполагающих прямое вычисление преобразования Гильберта от входных экспериментальных данных, в данной работе предлагается решать интегральное уравнение свертки (19). В расчетах использована программа `Dconv2_n`, которая была получена некоторой модификацией (подробнее см. в [35]) программы `Dconv2` из пакета `RECOVERY` [9], и основана на методе максимального правдоподобия. Это нелинейный метод и, как было показано [10], им действительно удается реализовывать сверхразрешение. Детальное описание процедуры восстановления дано в работах [9, 10].

В работе [12] приводится частотный анализ сверхразрешения для алгоритма максимизации среднего, практически совпадающего с использованным нами алгоритмом, который, в свою очередь, является развитием алгоритма Тараско [36]. Следует также упомянуть работу [37], посвященную ИК-спектроскопии, где соотношение Крамера–Кронига также сведено к системе интегральных уравнений первого рода, решаемых нелинейным методом минимизации.

#### 4. ПРИМЕРЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ В ГИЛЬБЕРТ-СПЕКТРОСКОПИИ

*Численное моделирование.* Перед тем, как продемонстрировать применение программы `Dconv2_n` к реальным экспериментальным данным, было проведено тестирование метода с использованием численных моделей. Как правило, мы можем использовать только ограниченный, вместо бесконечного, интервал смещений, на котором измеряется гильбертограмма  $g(\bar{\nu})$  и который должен быть согласован с ограниченной областью частот  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ ,  $\omega_2 < \infty$  (обычно  $\omega_1 = 0$ ), где расположен измеряемый спектр  $S_i(\omega)$ . Мы называем этот момент ограничением данных. Эффект от такого ограничения в окончательном результате для различных методов реализации преобразования





**Рис. 2.** Эффект ограничения данных при измерениях: а: 1 – входной лоренцевский пик  $S(\omega)$  с полушириной  $D = 60$ , 2 – обратное преобразование Гильберта  $g(\bar{V})$  от лоренцевского пика с добавленным к исходному сигналу нормально распределенного шума при отношении сигнал/шум 20 дБ (кривая имитирует измеренный отклик); б: 1 – исходное распределение Лоренца  $S(\omega)$ , 2 – распределение  $\hat{S}(\omega)$ , восстановленное посредством вычисления по формуле (11) с использованием быстрого ДПФ с оптимальной фильтрацией при вычислении преобразования Гильберта, 3 – распределение  $\hat{S}(\omega)$ , полученное решением интегрального уравнения (19) с использованием программы Dconv2 (тонкая кривая с шумом).

Гильберта представлен на рис. 2. В одном случае метод основан на применении быстрого ДПФ совместно с оптимальной фильтрацией [38], в другом был использован нелинейный метод, реализованный в программе Dconv2\_n. Исходный спектр (кривая 1), который должен быть получен в результате применения гильберт-спектрологии, и вычисленная из него входная гильбертограмма с отношением сигнал/шум 20 дБ (кривая 2) приведены на рис. 2а. Гильбертограмма была оборвана на уровне примерно в 1/2 от ее максимального значения. Результаты преобразования приведены на рис. 2б. Видна существенная разница между результатами обоих методов на высокочастотном конце спектра. Реализация преобразования Гиль-

берта, согласно формуле (11), в которой гильбертограмма была представлена своим рядом Фурье с помощью быстрого ДПФ, привела к большому отклонению результата от правильного поведения спектра в области  $\omega \approx \omega_2$ . В то же время решение интегрального уравнения (19) не показало такого отклонения, и шум остался примерно на том же уровне, как и в исходном сигнале. Ошибочный “хвост” в спектре, полученном с помощью ДПФ, представляет собой след от логарифмической расходимости преобразования Гильберта на краю интервала в точке разрыва первого рода, который образуется вследствие периодического повторения гильбертограммы, представленной рядом Фурье.

Отметим, что использование четно-нечетного продолжения гильбертограммы (см. разд. 2) дает спектральную кривую, практически не отличающуюся от кривой  $I$  (рис. 2б). Получить же таким методом гильбертограмму  $2$  из распределения Лоренца  $I$  (рис. 2а) не удастся. Причина – в локализованности спектра (хвост распределения Лоренца убывает как  $1/\omega^2$ ) и протяженности получаемой из него гильбертограммы (убывает как  $1/\omega$ ), а также в том, что вследствие взаимной однозначности прямого и обратного преобразований Гильберта, повторное действие преобразования Гильберта на  $g(\bar{v})$  соответствует свертке  $S_f(\omega)$  с дельта-функцией.

Еще один пример моделирования представляет собой проверку гильберт-спектроскопии на спектре частотно-модулированного (ЧМ) колебания. Этот случай дает нам возможность моделировать действие на переход сложного излучения с непрерывным спектром. Зависящая от времени функция, описывающая колебания с гармонической модуляцией частоты, может быть записана в виде

$$f(t) = \cos\left(\omega_0 t + \frac{\Delta}{\Omega} \sin \Omega t\right). \quad (23)$$

Разложение Фурье этой почти периодической функции есть во многих учебниках (см., например, [39], с. 39). Однако в нашем случае удобнее работать с ковариацией  $f(t)$  и ее спектральной плотностью. Используя определение функции ковариации  $\Phi(\tau)$  и ее спектрального разложения, которое пригодно для периодических и почти периодических функций

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) f(t + \tau), \\ S_\Phi(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} dt \Phi(\tau) \cos(\omega \tau), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Phi(\tau) = \sum_{\omega_k \in (-\infty, \infty)} S_\Phi(\omega_k) \exp(-i\omega_k \tau),$$

мы получим для функции (23) следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \frac{1}{2} J_0\left(\frac{2\Delta}{\Omega} \sin \frac{\Omega \tau}{2}\right) \cos(\omega_0 \tau), \\ S_\Phi(\omega_k) &= \frac{1}{4} J_k^2\left(\frac{\Delta}{\Omega}\right) [\delta_{mk} + \delta_{nk}]. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $J_k(x)$  – функция Бесселя с целочисленным индексом,  $\omega_0, \Omega > 0$ ,  $\omega \in (-\infty, \infty)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , мно-

жество  $\{\omega_k\}$  определяется как решения уравнений  $|\omega \pm \omega_0| = k\Omega$ , целочисленные параметры равны

$$m = \frac{|\omega_k - \omega_0|}{\Omega}, \quad n = \frac{|\omega_k + \omega_0|}{\Omega}$$

и  $\delta_{mn}$  – индекс Кронекера

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Нас будет интересовать случай очень низкой частоты модуляции, т.е.

$$\omega_0/\Omega \gg \Delta/\Omega \gg 1, \quad (26)$$

поэтому суммирование по  $\omega_k$  в (24) может быть аппроксимировано интегрированием по  $\omega$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= 2 \sum_{\omega_k > 0} S_\Phi(\omega_k) \cos \omega_k \tau \approx \\ &\approx 2 \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\pi}{2\Omega} \left[ J_\mu^2\left(\frac{\Delta}{\Omega}\right) + J_\nu^2\left(\frac{\Delta}{\Omega}\right) \right] \cos(\omega \tau). \end{aligned} \quad (27)$$

Полученное выражение (27) определяет непрерывную аппроксимацию спектральной плотности частотно-модулированного колебания. А именно

$$\begin{aligned} S_\Phi(\omega) &= \frac{\pi}{2\Omega} \left[ J_\mu^2\left(\frac{\Delta}{\Omega}\right) + J_\nu^2\left(\frac{\Delta}{\Omega}\right) \right], \\ \mu &= \frac{|\omega - \omega_0|}{\Omega}, \quad \nu = \frac{|\omega + \omega_0|}{\Omega}. \end{aligned} \quad (28)$$

При условиях (26) эта формула может быть еще упрощена с помощью равномерного асимптотического представления Лангера для функций Бесселя ([31], разд. 7.4.4). Переходя к пределу  $\Omega \rightarrow 0$  в (28) и пренебрегая экспоненциально малым вторым членом в скобках, получим

$$S_\Phi(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\Delta^2 - (\omega - \omega_0)^2)^{-1/2}, & |\omega - \omega_0| < \Delta, \\ \frac{\exp\left[-\frac{2}{3} \frac{|\omega - \omega_0|}{\Omega} \left(1 - \frac{\Delta^2}{(\omega - \omega_0)^2}\right)^{3/2}\right]}{4|\omega - \omega_0| \left(1 - \frac{\Delta^2}{(\omega - \omega_0)^2}\right)^{1/2}}, & |\omega - \omega_0| > \Delta. \end{cases} \quad (29)$$

Легко видеть, что спектр (29) частотно-модулированных колебаний экспоненциально мал вне области  $|\omega - \omega_0| < \Delta$ , и мы примем в дальнейшем

следующее выражение для спектральной плотности ЧМ-колебаний:

$$S_{\Phi}(\omega) = \begin{cases} \frac{S_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta}\right)^2}}, & |\omega - \omega_0| < \Delta, \\ 0, & |\omega - \omega_0| \geq \Delta. \end{cases} \quad (30)$$

Выражение (30) может быть выведено также простым усреднением во времени осциллирующей спектральной компоненты гармонического сигнала:

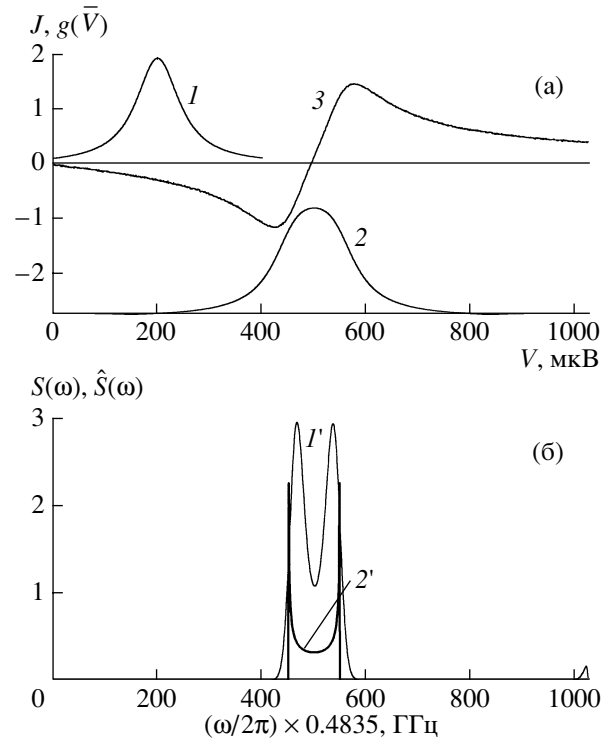
$$S(\omega) = \frac{\Omega}{4\pi} \int_{-\pi/\Omega}^{\pi/\Omega} dt \delta(\omega - \omega_0 - \Delta \cos \Omega t).$$

На рис. 3а представлены: линия джозефсоновских колебаний с лоренцевским профилем, свертка распределения Лоренца с ЧМ-спектром (30) и моделирование экспериментальных данных (гильбертограммы) при отношении сигнал/шум 40 дБ.

На рис. 3б кривая 1' представляет спектр ЧМ-колебания, восстановленный в два этапа из гильбертограммы 3а (рис. 3). На первом этапе решалось интегральное уравнение (19) с указанной гильбертограммой в качестве  $g(\bar{v})$ . Результатом явилась кривая 2а (рис. 3а), на которой не видно никаких признаков сложной структуры спектра ЧМ-колебания. Затем было решено уравнение (16) относительно  $S_1(\omega)$ . В качестве ядра интегрального уравнения использовался лоренцевский контур (кривая 1, рис. 3а), а в качестве правой части – результат предыдущего этапа (кривая 2). После 50 итераций достигнуто сверхразрешение 1.955.

*Результаты экспериментальных измерений.* В качестве практической проверки подхода с использованием интегрального уравнения мы исследовали спектр частотно модулированной ЛОВ, измеренный методом техники гильберт-спектроскопии. В измерениях использованы высокотемпературные джозефсоновские переходы, изготовленные методом лазерной абляции YBaCuO на MgO, YSZ и сапфировых бикристаллических подложках и интегрированных с логопериодическими широкополосными антеннами. Типичные параметры переходов субмикронной ширины, измеренные в жидком гелии: нормальное сопротивление до 20 Ом, критический ток ~100 мкА, характерное напряжение до 2 мВ. Образцы с джозефсоновскими переходами и антеннами помещали на плоскую поверхность удлиненной гиперполусферической сапфировой линзы в криостат с оптическим окном.

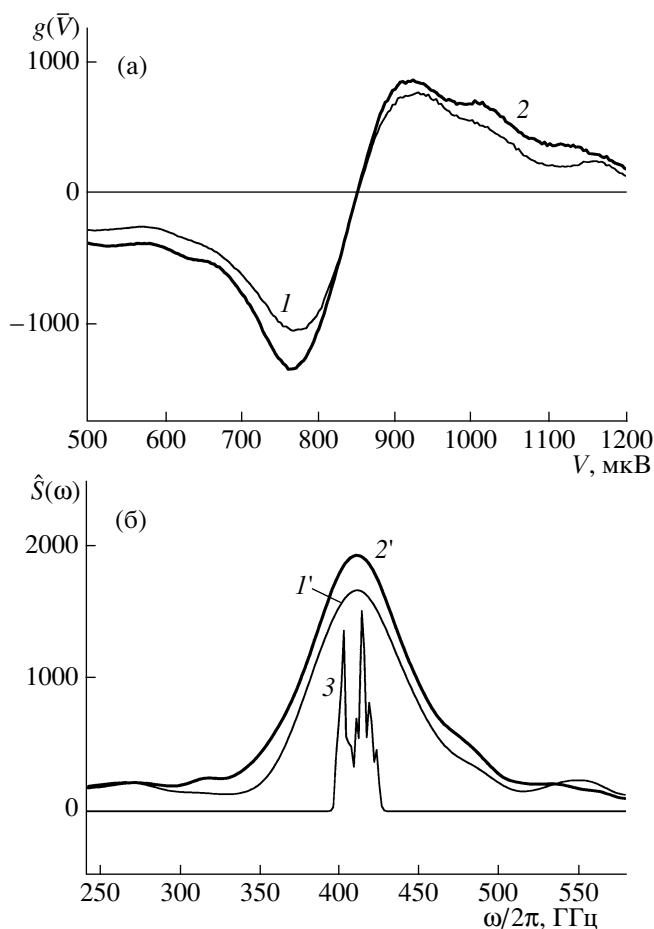
Детекторный отклик измеряли с использованием механического модулятора на входе и синхронного детектора для выделения детекторного



**Рис. 3.** Моделирование измерений спектра ЧМ-колебания. а: 1 – линия джозефсоновской генерации  $J$  с лоренцевским профилем и полушириной  $D = 50$ , 2 – свертка ЧМ-спектра  $S(\omega)$  (показан кривой 2') с распределением Лоренца 1; 3 – гильбертограмма  $g(\bar{V})$ , полученная применением обратного преобразования Гильберта к кривой 2; добавлен нормальный шум до величины отношения сигнал/шум 40 дБ; б: 1' – результат восстановления  $\hat{S}(\omega)$  спектра ЧМ-сигнала из уравнения (16), 2' – исходный спектр  $S(\omega)$  ЧМ-колебания, даваемый формулой (30).

отклика. В качестве источника излучения в диапазоне 200...550 ГГц использована ЛОВ. Собственная ширина линии генерации ЛОВ не превышает 1 МГц и для получения широкополосного сигнала мы использовали гармоническую модуляцию напряжения катода. Амплитуда девиации 100 В соответствует девиации частоты ~6 ГГц на центральной частоте 410 ГГц. Полная девиация частоты от минимума до максимума составляла ~12 ГГц.

На рис. 4а показаны последовательные стадии обработки данных в технике гильберт-спектроскопии. Гильбертограммы, полученные на джозефсоновском переходе в режиме заданного тока, соответствуют случаям без модуляции ЛОВ (кривая 1) и с частотной модуляцией (кривая 2). Результаты преобразования Гильберта, получены численным решением интегрального уравнения (19), в правую часть которого были подставлены гильбертограммы 1 и 2 соответственно (рис. 4).



**Рис. 4.** Эксперимент с модуляцией частоты ЛОВ. а: 1 – входная гильбертограмма  $g(\bar{V})$  спектра ЛОВ на частоте 410 ГГц без частотной модуляции, 2 – то же с частотной модуляцией. Отношение сигнал/шум в исходном сигнале 39 дБ. б: кривая 1' – преобразование Гильберта  $\hat{S}(\omega)$  от кривой 1а, кривая 2' – преобразование Гильберта от кривой 2, двойной пик в центре кривой 3 есть ЧМ-спектр, полученный программой Dconv\_n после 200 итераций (сверхразрешение составило 1.23).

На первый взгляд в результатах не видно ничего интересного.

Спектральные кривые 1 и 2 (рис. 4б) соответствуют левой части уравнения (16) для случаев монохроматического и ЧМ-спектров ЛОВ. По причине большой ширины линии джозефсоновской генерации, измеренной в немодулированном режиме ЛОВ, на исходном спектре в модулированном режиме не наблюдается ожидаемой сложной зависимости, в согласии с интегралом свертки в (16).

Чтобы восстановить ЧМ-спектр со сверхразрешением, т.е. по возможности устранить влияние большой ширины линии джозефсоновской генерации, можно было использовать измеренный спектр джозефсоновских колебаний (ЛОВ без ЧМ, кривая 1, рис. 4б) как ядро в интегральном уравнении

свертки (16). Однако оказалось, что результат (кривая 3, рис. 4б) получается более успешным, если гильбертограмму, измеренную с монохроматическим излучением (кривая 1, рис. 4а), использовать как ядро в интегральном уравнении (15), а гильбертограмму для ЧМ ЛОВ (кривая 2, рис. 4а) подставить в левую часть уравнения (15) (после соответствующего его преобразования от  $\Delta \bar{i}$  к  $g(\bar{v})$ ).

Имеет смысл изложить сделанное на более привычном языке. Мы можем восстановить невидимую структуру (кривая 2, рис. 4а), используя кривую 1 в качестве аппаратной функции, а кривую 2 как входной сигнал стандартной программы Dconv\_n. Результат восстановления спектра представлен раздвоенным пиком в центре рис. 4б. Расстояние между двумя максимумами равно 11 ГГц, что находится в хорошем соответствии с оценкой 12 ГГц, согласно описанной выше калибровке ЛОВ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обсуждены проблемы, возникающие при применении гильберт-спектроскопии из-за использования резистивной модели джозефсоновского перехода при ее обосновании. Предложено обобщение основных соотношений, позволяющее исследовать спектр джозефсоновских колебаний в структурах, ВАХ которых имеет особенности, не описываемые резистивной моделью. Следует иметь в виду, что из-за зависимости ширины линии джозефсоновской генерации от напряжения смещения наиболее точные результаты в измерениях ее спектра могут быть получены только при сканировании частоты внешнего источника излучения и фиксированном напряжении смещения (см. (16), а также [1] формулы (7), (8)). Проанализированы численные методы восстановления спектра в гильберт-спектроскопии. Для повышения разрешения и точности измерения спектра предложено применять метод решения интегрального уравнения вместо использования дискретного преобразования Фурье. Решение интегрального уравнения методом максимального правдоподобия было реализовано с помощью пакета программ RECOVERY. Эффективность предложенной методики продемонстрирована на примере численного моделирования и экспериментального измерения ЧМ-излучения ЛОВ в диапазоне 400 ГГц. Получено сверхразрешение  $SR = 2$  в численном моделировании и  $SR = 1.23$  в эксперименте.

Следует отметить, что на пути практической реализации гильберт-спектроскопии как регулярного метода измерений имеется еще ряд неисследованных принципиальных вопросов. Однако они не дают оснований сомневаться в ее перспективности.

Авторы благодарны профессору Т. Клаесону за полезные обсуждения работы, Т. Линдстрему и З. Иванову за помощь в проведении измерений

(Чалмерский технологический университет г. Гетеборг, Швеция) и Е. Степанцову (Институт кристаллографии РАН, Москва) за изготовление бисталлов и джозефсоновских переходов.

Работа выполнена при финансовой поддержке ИНТАС (грант 01-686).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дивин Ю. Я., Полянский О.Ю., Шульман А.Я. // Письма в ЖТФ. 1980. Т. 6. № 17. С. 1056.
2. Tarasov M.A., Shul'man A.Ya., Prokopenko G.V. et al. // IEEE Trans. 1995. V. AS-6. № 2. Pt. 3. P. 2686.
3. Hinken J.H. // Superconducting Quantum Electron. / Ed. V.Kose. N.-Y. etc: Springer-Verlag, 1989. P. 151.
4. Divin Yu.Ya., Schulz H., Poppe U. et al. // Appl. Phys. Lett. 1996. V. 68. № 11. P. 1561.
5. Tarasov M., Shul'man A., Polyansky O. et al. // Proc. ESA Symp. "The Far InfraRed and Submillimetre Universe". Europ. Space Agency Symp. SP-401. 1997. P. 445.
6. Kaestner A., Volk M., Ludwig F. et al. // Appl. Phys. Lett. 2000. V. 77. № 19. P. 3057.
7. Tarasov M., Stepanov E., Ivanov Z. et al. // Inst. Phys. Conf. Ser. 2000. № 167. P. 611.
8. Лухарев К.К., Ульрих Б.Т. Системы с джозефсоновскими контактами. М.: Изд-во МГУ, 1978.
9. Gelfgat V.I., Kosarev E.I., Podolyak E.R. // Comp. Phys. Commun. 1993. V. 74. № 3. P. 335.
10. Косарев Е.Л. // РЭ. 1990. Т. 35. № 1. С. 68.
11. Kosarev E.L. // Inverse Problems. 1990. V. 6. № 1. P. 55.
12. Conchello J.-A. // J. Opt. Soc. Amer. 1998. V. 15. № 10. P. 2609.
13. Раутман С.Г. // УФН. 1958. Т. 66. С. 475.
14. Лухарев К.К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. М.: Наука, 1985.
15. Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. Физика и применения / Пер. с англ. под ред. Л.Г. Асламазова, Л.Н. Булаевского и С.И. Веденева. М.: Мир, 1984.
16. Kanter H., Vernon F.L. // J. Appl. Phys. 1972. V. 43. № 7. P. 3174.
17. Kautz R.L., Ono R.H., Reintsema C.D. // Appl. Phys. Lett. 1992. V. 61. № 3. P. 342.
18. Divin Yu.Ya., Mygind J., Pedersen N.F., Chaudhari P. // Appl. Phys. Lett. 1992. V. 61. № 25. P. 3053.
19. Koelle D., Kleiner R., Ludwig F. et al. // Rev. Mod. Phys. 1999. V. 71. № 3. P. 631.
20. Волков А.Ф. // РЭ. 1972. Т. 17. № 12. С. 2581.
21. Bedrosyan E. // Proc. IEEE. 1963. V. 51. P. 5.
22. Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е. Разделение частот в теории колебаний. М.: Наука, 1983.
23. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных / Пер. с англ. под ред. И.И. Коваленко. М.: Мир, 1989.
24. Дивин Ю.Я., Полянский О.Ю., Шульман А.Я. // Оптика и спектроскопия. 1979. Т. 47. № 1. С. 170.
25. Шульман А.Я. // ЖЭТФ. 1981. Т. 81. № 2. С. 784.
26. Divin Yu.Ya., Polyanskii O.Yu., Shul'man A.Ya. // IEEE Trans. 1983. V. MAG-19. № 3. P. 613.
27. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971.
28. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов / Пер. с англ. под ред. Ю.Н. Александрова. М.: Мир, 1978.
29. Сороко Л.М. Гильберт-оптика. М.: Наука, 1981.
30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
31. Klucker R., Nielsen U. // Comput. Phys. Commun. 1973. V. 6. № 4. P. 187.
32. Collocott S.J. // Comput. Phys. Commun. 1977. V. 13. № 3. P. 203.
33. Collocott S.J., Troup G.J. // Comput. Phys. Commun. 1979. V. 17. № 4. P. 393.
34. Weideman J.A.C. // Math. Comput. 1995. V. 64. № 210. P. 745.
35. Kosarev E.L., Shul'man A.Ya., Tarasov M.A., Lindstrom T. // Comput. Phys. Commun. 2003. V. 151. P. 171.
36. Тараско М.З. О методе решения линейной системы со стохастическими матрицами. Препринт № 156. Обнинск: ФЭИ, 1969.
37. Кузьменко А.Б., Тищенко Е.А., Кречетов А.С. // Оптика и спектроскопия. 1998. Т. 84. № 3. С. 402.
38. Kosarev E.L., Pantos E. // J. Phys. E.: Sci. Instrum. 1983. V. 16. P. 537.
39. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Физматгиз, 1962.
40. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. N.Y.: McGraw-Hill, 1953. V. 2.